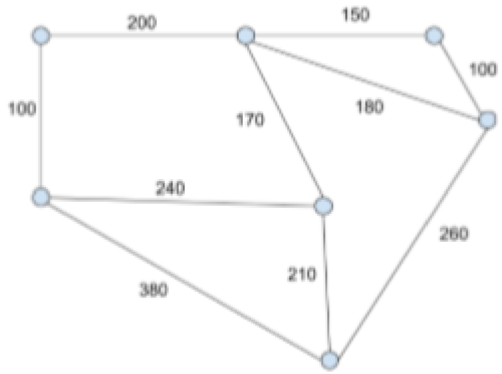
Рубежный контроль по общеразвивающей образовательной программе по направлению «Математика: Олимпиадный уровень» 8-9 класс, 2023 год.

1 часть
Вариант 1

1. На строительном участке нужно создать телефонную сеть, соединяющую все бытовки (рис.). Для того, чтобы телефонные линии не мешали строительству, их решили проводить вдоль дорог. Схема участка изображена на рисунке ниже, где бытовкам соответствуют вершины графа и указаны длины дорог между ними. Каким образом провести телефонные линии, чтобы их общая длина была минимальной?



2. Маша пошла в спортивный магазин. Сколькими способами она может заплатить за мячик стоимостью 100 рублей, если у неё в кармане только монеты по 10 и 5 рублей?
3. Семья ночью подошла к мосту. Папа может перейти его за 1 минуту, мама – за 2, малыш – за 5, а бабушка – за 10 минут. У них есть один фонарик. Мост выдерживает только двоих. Как им перейти мост за 17 минут? (Если переходят двое, то они идут с меньшей из их скоростей. Нельзя: двигаться по мосту без фонарика, светить издали, носить друг друга на руках, кидать фонарик).
4. В городе N живет около 10 млн. жителей, на голове у каждого не более 150 000 волос. Докажите, что в городе N есть по крайней мере 60 человек с одинаковым числом волос на голове.
5. Фигура «слоненок» ходит по шахматной доске, как и слон, по диагонали, но только на одно поле. Можно ли перекрасить клетки шахматной доски, используя черный и белый цвета, чтобы при каждом ходе «слоненка» цвет поля менялся?
6. Волк и Заяц играют в следующую игру. На доске написано некоторое натуральное число. Ход состоит в том, чтобы вычесть из числа какую- нибудь его ненулевую цифру и написать на месте старого числа получившееся число. Выигрывает тот, кто получит ноль. Начинает игру Волк. Какое число первоначально должно быть написано, чтобы Заяц имел выигрышную стратегию?
7. В стране N 1998 городов, и из каждого осуществляются беспосадочные перелеты в три других города (все авиарейсы двусторонние). Известно, что из каждого города, сделав несколько пересадок, можно долететь до любого другого. Министерство Безопасности хочет объявить закрытыми 200 городов, никакие два из которых не соединены

авиалинией. Докажите, что это можно сделать так, чтобы можно было долететь из каждого незакрытого города в любой другой, не делая пересадок в закрытых городах.

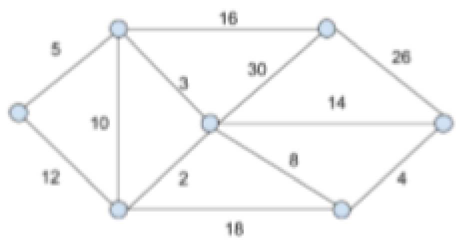
8. Будут ли два графа одинаковыми, если а) у них по 7 вершин, степень каждой из которых равна 3? б) у них по 5 вершин, степень каждой из которых равна 2? в) у них по 8 вершин, степень каждой из которых равна 3?

9. Сколькими способами можно составить прямоугольник **а)** 2×3, **б)** 2×4 из доминошек (прямоугольников 1×2)? (Все фигуры можно поворачивать.)

10. В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в бутылке, сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом, в банке не лимонад и не вода. Стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей?

Вариант 2

1. Рабочие изучают карту области, где около каждой дороги было подписана её длина в километрах (рис.). Они хотят соединить все города системой дорог, но при этом построить как можно меньше километром дороги. На ремонт 1км дорожного полотна бригаде требуется 1 день. За сколько дней они выполнят задание?



2. На полдник выдавали булочку, сок, печенье и 2 яблока. Полина, быстро выбежав из столовой, нащупала в сумке только 3 предмета. Посчитайте, сколько вариантов «почтиполдников» могла получить Полина? (Все яблоки одинаковые.)

3. Троим мудрецам завязывают глаза и говорят, что каждому из них на голову надели один из пяти колпаков, среди которых два зеленых и три красных. Затем глаза развязывают и просят, глядя на двух других мудрецов, определить цвет своего колпака. Все три колпака были красные. Через несколько минут один мудрец дал правильный ответ. Как он установил цвет своего колпака?

4. В первенстве по футболу участвуют 12 команд, каждые две из них должны сыграть между собой один матч. Докажите, что в любой момент состязаний имеются две команды, сыгравшие одинаковое число матчей.

5. Какое наименьшее количество типов монет должен выпустить Монетный Двор России, чтобы любую сумму от 1 до 20 рублей можно было бы уплатить не более чем двумя монетами (без сдачи)?

6. Имеется кучка из 25 камней. Игроки по очереди берут из этой кучки 1, 2 или 3 камня. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода.

7. Решите в целых числах уравнения:

а) $x^2 - xy - y^2 = 1$;

б) $x^2 - xy - y^2 = -1$.

8. На острове Зарбитан живет 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно меняют окраску на третий цвет. Может ли случиться, что в некоторый момент все хамелеоны на острове станут одного цвета?

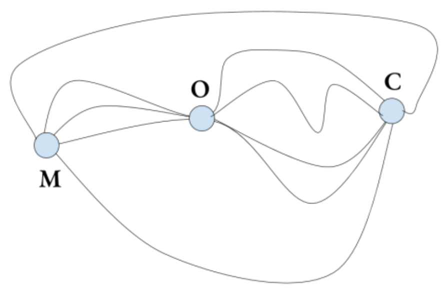
9. В куче лежат 50 камней. Двое поочередно добавляют в нее любое количество камней от 1 до 10. Выигрывает тот, кто первым сумеет довести количество камней до двухсот. Кто выигрывает?

10. По окружности расположены 6 чисел, при этом каждое число равно модулю разности двух следующих за ним по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна единице. Найдите эти числа.

Часть 2.

1. На математическом кружке у любых двух школьников ровно пять общих знакомых. Докажите, что общее число знакомств кратно трём.

2. Сколькими способами можно добраться из магазина (М) в сад (С) по дорогам, изображённым на рисунке 1–2? Ходить можно и через огород (О).



3. Математик пошел к приятелю в гости, но забыл номер его квартиры. Он знал, что:
– если верно, что номер квартиры кратен двум, то он больше, чем 50, но меньше, чем 59;
– если верно, что этот номер не кратен трем, то он больше, чем 60, но меньше, чем 69;
– если верно, что этот номер не кратен четырем, то он больше, чем 70, но меньше, чем 79.
Можно ли по этим данным вычислить номер квартиры?

4. Имеются монеты, одинаковые по внешнему виду. Одна из монет тяжелее остальных. Есть рычажные весы без гирь. Сколько взвешиваний надо сделать для гарантированного нахождения тяжелой монеты, если всего монет а) 21; б) 200; в) n?

5. N цифр – единицы и двойки – расположены по кругу. *Изображенным* назовем число, образуемое несколькими цифрами, расположенными подряд (по часовой стрелке или против часовой стрелки). При каком наименьшем значении N все четырехзначные числа, запись которых содержит только цифры 1 и 2, могут оказаться среди *изображенных*?

6. Играют двое. Первый называет любое число от 1 до 10. Затем они поочередно прибавляют к последнему названному числу число от 1 до 10 и называют сумму. Проигрывает тот, кто назовет трехзначное число. Кто выигрывает при правильной игре?

7. Целые неотрицательные числа x и y удовлетворяют равенству $x^2 - mxy + y^2 = 1$ (1) тогда и только тогда, когда x и y – соседние члены последовательности (2): $a_0 = 0$, $a_1 =$

1, $a_2 = m$, $a_3 = m^2 - 1$, $a_4 = m^3 - 2m$, $a_5 = m^4 - 3m^2 + 1$, ..., в которой $a_{k+1} = ma_k - a_{k-1}$ для любого k 0. Докажите это.

8. Скажем, что колода из 52 карт сложена правильно, если каждая пара лежащих рядом карт совпадает по масти или достоинству, то же верно для верхней и нижней карты, и наверху лежит туз пик. Докажите, что число способов сложить колоду правильно а) делится на 12!; б) делится на 13!.

9. На окружности с диаметром *AB* дана точка *C*. Через точки *B* и *C* проведены касательные к окружности, продолжения которых пересекаются в точке *M*. Продолжение хорды *AC* пересекается с касательной *BM* в точке *K*. Доказать, что отрезки *CM* и *MK* равны.

10. Андрей сдавал промежуточный теоретический экзамен в автошколе. По правилам, за каждый неверный ответ на вопрос назначаются еще 2 дополнительных вопроса. Изначально Андрей получил 5 вопросов, а в результате отвечал на 17 вопросов. Сколько раз он ошибся?

11. Доказать, что число $p^2 - 49$ делится на 24, если *p* – простое число (*p*>3).

Вариант 2

1. Каждый из семи мальчиков имеет не менее трех братьев. Докажите, что все мальчики— братья.

2. Кириллу подарили робота, который ходит только на 1 метр на север или на 1 метр на восток. Сколькими способами робот сможет дойти по сторонам клеток из точки *A* в точку *B* на рисунке 1 и 2? Сторона клетки 1 метр.

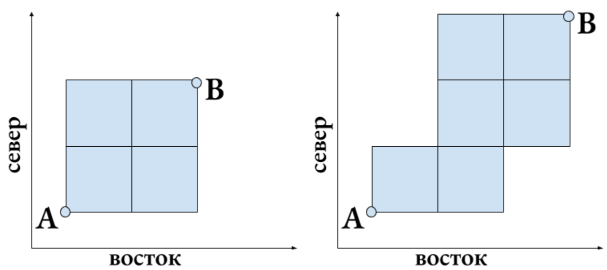


Рис. 1 **Рис. 2**

3. Жители города *A* говорят только правду, жители города *B* – только ложь, а жители города *C* – попеременно правду и ложь (то есть из каждых двух высказанных ими утверждений одно истинно, а другое – ложно). В пожарную часть сообщили по телефону: «У нас пожар, скорее приезжайте!» «Где?» – спросил дежурный по части. «В городе *C* », – ответили ему. Дежурный смог определить, в какой город должна приехать пожарная машина, через час пожар был потушен. В каком городе был пожар?

4. Имеется 7 внешне одинаковых монет, среди которых 5 настоящих (все одинакового веса) и 2 фальшивых (одинакового между собой веса, но легче настоящих). Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь выделить 3 настоящие монеты?

5. По окружности расположены 6 чисел, при этом каждое число равно модулю разности двух следующих за ним по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна единице. Найдите эти числа.
6. В куче 25 камней. Игроки по очереди могут взять из кучи 2 камня, 4 камня или 7 камней. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода. Кто победит при правильной игре?
7. Найдите все положительные числа $x1, x2, ..., x10$, удовлетворяющие при всех $k = 1, 2,..., 10$ условию $(x1 + ... + xk)(xk + ... + x10) = 1$.
8. Скажем, что колода из 52 карт сложена правильно, если каждая пара лежащих рядом карт совпадает по масти или достоинству, то же верно для верхней и нижней карты, и наверху лежит туз пик. Докажите, что число способов сложить колоду правильно а) делится на 12!; б) делится на 13!.
9. На окружности с диаметром *AB* дана точка *C*. Через точки *B* и *C* проведены касательные к окружности, продолжения которых пересекаются в точке *M*. Продолжение хорды *AC* пересекается с касательной *BM* в точке *K*. Доказать, что отрезки *CM* и *MK* равны.
10. Андрей сдавал промежуточный теоретический экзамен в автошколе. По правилам, за каждый неверный ответ на вопрос назначаются еще 2 дополнительных вопроса. Изначально Андрей получил 5 вопросов, а в результате отвечал на 17 вопросов. Сколько раз он ошибся?
11. Доказать, что число $\mathrm{p}^2 - 49$ делится на 24, если *p* – простое число ($p>3$).